Analysis – Differenzialrechnung
Arbeitsbogen 4 – 6

zu 1.a) $f(x) = 6x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 0{,}5x^2 + 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 24x^3 - x^2 + x + 2$

zu 1.b) $f(x) = (x^3 + 5x - 1)2x^2 = 2x^5 + 10x^3 - 2x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 10x^4 + 30x^2 - 4x$

zu 1.c) $f(x) = -3x^2 + x - \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -6x + 1 + \frac{3}{x^2}$

zu 1.d) $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

zu 2.a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\,; \quad f'(-1) = 1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -1$

zu 2.b) $f(x) = x^3 + 4x^2 - x + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 8x - 1; \quad f'(2) = 12 + 16 - 1 = 27$

zu 3) $f(x) = \frac{1}{4x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{4x^2} = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{4}; \quad x_2 = \frac{1}{4}$

zu 4) $f(x) = 2\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 4$

zu 5) $f(x) = \cos x - \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x - \cos x \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$

zu 6) $f(x) = |-0{,}5x - 0{,}5| = \begin{cases} -0{,}5x - 0{,}5 & \text{für } x \le -1 \\ 0{,}5x + 0{,}5 & \text{für } x > -1 \end{cases}$ $\left[\text{NR: } \begin{array}{l} -0{,}5x - 0{,}5 = 0\,; -0{,}5x = 0{,}5\,; x_0 = -1 \\ \text{und die Gerade } y = -0{,}5x - 05 \text{ fällt!} \end{array}\right.$

Zu 7.a) $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2 - 0{,}5 & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ 0{,}5x^2 + 0{,}5 & \text{für } 2 < x \le 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (0{,}5x^2 - 0{,}5) = 1{,}5 = f(2); \quad \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} (0{,}5x^2 + 0{,}5) = 2{,}5 \ne 1{,}5 \quad \Rightarrow$

f ist an der Stelle $x_0 = 2$ unstetig. An allen anderen Stellen ihres Definitionsbereichs ist f als abschnittsweise ganzrationale Funktion stetig.

zu 8.a) $f(x) = x^2 \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x\cos x + x^2(-\sin x) = 2x\cos x - x^2 \sin x$

zu 8.b) $f(x) = \frac{x^2}{2x+3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x(2x+3) - x^2 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2 + 6x - 2x^2}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2 + 6x}{(2x+3)^2}$